ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2024-2025

TD 10 : Représentations de groupes

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Exercices importants

Exercice 1. (Exemples de représentations du groupe symétrique)
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On s'intéresse aux représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

1. Quelle sont les représentations de degré 1 de $\mathfrak{S}_n$?

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ par

$$\sigma \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i e_i := \sum_{i=1}^{n} x_i e_{\sigma(i)}.$$

Montrer que cela définit bien une représentation de $\mathfrak{S}_n$. À quoi correspond le morphisme $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ associé à cette représentation ?

3. Montrer que l'ensemble des points fixes de cette représentation est une droite D de $\mathbb{C}^n$ (et donc une sous-représentation irréductible).

4. On note H l'orthogonal de D pour le produit hermitien canonique. Montrer que

$$H = \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{C}^n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

et que c'est une sous-représentation. On l'appelle la *représentation standard* de $\mathfrak{S}_n$.

5. On va montrer que la représentation standard est irréductible.

- **(a)** Soit V une sous-représentation non nulle de H. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in V \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i \neq x_j$. On pose $\tau = (i\ j) \in \mathfrak{S}_n$.
- **(b)** En faisant agir τ sur x, montrer que $e_i - e_j$ appartient à V.
- **(c)** En déduire que pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $k \neq \ell$, $e_k - e_\ell \in V$.
- **(d)** En déduire que $V = H$ et que H est irréductible.

6. Montrer que D et H sont les seules sous-représentations irréductibles de $(\mathbb{C}^n, \rho)$.

Exercice 2. (Tordue d'une représentation par un caractère linéaire)
Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe G, et soit $\varepsilon : G \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes. On définit une nouvelle représentation de G en posant

$$\rho^\varepsilon : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & \varepsilon(g)\rho(g). \end{array}$$

Le couple (V, ρ^ε) est appelé *la tordue par* ε de la représentation (V, ρ).

1. Vérifier que (V, ρ^ε) est bien une représentation de G.

2. Montrer que (V, ρ) est irréductible si et seulement si (V, ρ^ε) l'est.

Exercice 3. (Produit hermitien invariant et théorème de Maschke)

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation complexe de G.

1. Montrer qu'il existe un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant par G (c'est-à-dire que pour tous v, $w \in V$ et pour tout $g \in G$, $\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$).

2. Soit $W \subset V$ une sous-représentation. Montrer que l'orthogonal

$$W^{\perp} := \{v \in V,\ \forall w \in W,\ \langle v, w \rangle = 0\}$$

est une sous-représentation de V.

3. Retrouver le théorème de Maschke.

Exercice 4. (Représentations induite du quotient)

Soient un groupe G et H un sous-groupe distingué de G.

1. **(a)** Soit $\rho : G/H \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G/H. Montrer que ρ induit une représentation de $\tilde{\rho}$ de G.

(b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\tilde{\rho}$ l'est.

2. Réciproquement, soit $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{\rho}$ provienne d'une représentation de G/H.

Exercice 5.

Soit G un groupe fini, et soient (V, ρ_V) et (W, ρ_W) deux représentations de G. Pour une application linéaire $f : V \to W$ on définit

$$f_0 := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g)^{-1}.$$

1. Montrer que f_0 est un morphisme de représentations.

2. On suppose que V et W sont irréductibles. Montrer que $f_0 = 0$ si (V, ρ_V) et (W, ρ_W) ne sont pas isomorphes et que $f_0 = \frac{\mathrm{Tr}(f)}{\dim(V)} \mathrm{Id}_V$ si $(V, \rho_V) = (W, \rho_W)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. (Représentations de $\mathfrak{S}_3$)

Soit (V, ρ) une représentation complexe de $\mathfrak{S}_3$. On note τ la transposition $(1\ 2)$ et σ le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$. On note aussi j une racine primitive 3ᵉ de l'unité.

1. Montrer que $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable de spectre inclus dans $\{1, j, j^2\}$. On note $V_1 = \ker(\rho(\sigma) - \mathrm{Id})$, $V_j = \ker(\rho(\sigma) - j\,\mathrm{Id})$, et $V_{j^2} = \ker(\rho(\sigma) - j^2\,\mathrm{Id})$.

2. Montrer que V_1 est stable par $\rho(\tau)$, que $\rho(\tau)(V_j) \subset V_{j^2}$ et que $\rho(\tau)(V_{j^2}) \subset V_j$.

3. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous-représentations de V.

4. On suppose que V est irréductible.

(a) Montrer que soit $V = V_1$, soit $V = V_j \oplus V_{j^2}$.

(b) On suppose que $V = V_1$. Montrer que $\dim(V) = 1$, puis que soit $\rho = \mathbb{1}$, soit $\rho = \varepsilon$ la signature.

(c) On suppose que $V = V_j \oplus V_{j^2}$. Montrer que $\dim(V_j) = \dim(V_{j^2}) = 1$. En déduire que si W est une autre représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ telle que $W = W_j \oplus W_{j^2}$, alors $W \cong V$ en tant que représentations.

5. Faire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 7. (Contre-exemple au lemme de Maschke)

Soient p un nombre premier, et K un corps de caractéristique p (c'est-à-dire que $p \cdot 1_K = 0_K$). On fait agir $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur K^2 par

$$a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette action définit bien une représentation de G de degré 2.

2. Écrire le morphisme $G \to \mathrm{GL}_2(K)$ correspondant à cette représentation.

3. Montrer que cette représentation ne peut pas se décomposer en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 8. (Contre-exemple au lemme de Schur)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M est d'ordre 4. En déduire une représentation réelle $(\mathbb{R}^2, \rho)$ de $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Montrer que (V, ρ) est irréductible en tant que représentation réelle.

3. Montrer que $\mathrm{End}_G(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$.

4. Que se passe-t-il si on considère (V, ρ) comme une représentation complexe ?

Exercice 9. (Incursion en dimension infinie)

Soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation irréductible de G, éventuellement de dimension infinie.

1. Montrer que si G est fini alors (V, ρ) est nécessairement de dimension finie.

On suppose à partir de cette question que G est au plus dénombrable.

2. Montrer que (V, ρ) est engendré par une famille au plus dénombrable.

3. Soit $u \in \mathrm{End}_G(V)$. Montrer que pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, u est déterminé par l'image de v.

4. En déduire que $\mathrm{End}_G(V)$ est engendré par une famille au plus dénombrable.

5. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.

- **(a)** Construire un morphisme injectif de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}(X) \to \mathrm{End}_G(V)$.
- **(b)** Montrer que $\mathbb{C}(X)$ n'est pas engendré par une famille au plus dénombrable.
- **(c)** En déduire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda_0\,\mathrm{Id}_V$ n'est pas inversible.

6. En déduire que $u = \lambda_0\,\mathrm{Id}_V$ puis que $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{C}$.